

MIRCEA GANGA

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a M2

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii (TC + CD)

Filiera tehnologică, toate calificările profesionale (TC)

EDITURA MATHPRESS



CUPRINS

ELEMENTE DE ALGEBRĂ	3
----------------------------------	----------

1. GRUPURI	5
• Lege de compoziție internă	5
• Parte stabilă	8
• Proprietăți generale ale legilor de compoziție	11
• Structuri algebrice	24
• Monoizi	25
• Grupuri	27
• Grupuri finite	45
• Morfisme și izomorfisme de grupuri	54
• Teste de evaluare	68

2. INELE ȘI CORPURI	73
• Inele	76
• Probleme propuse	86
• Corpuri	88
• Probleme propuse	94
• Morfisme și izomorfisme de inele și corpuri	98
• Probleme propuse	102
• Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ	105
• Probleme propuse	171
• Teste de evaluare	181

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ	185
---	------------

1. PRIMITIVE	187
• Probleme care conduc la noțiunea de primitivă	190
• Primitivele unei funcții. Integrala nedefinită a unei funcții continue	197
• Probleme propuse	207
• Metode de calcul ale primitivelor	212

• Metoda integrării prin părți.....	215
• Probleme propuse	225
• Metoda integrării prin substituție	226
• Probleme propuse	230
• Integrarea funcțiilor raționale	234
• Probleme propuse	242
• Teste de evaluare	246
2. INTEGRALA DEFINITĂ	251
• Probleme care conduc la noțiunea de integrală definită	253
• Integrala definită a unei funcții continue. Formula Leibniz-Newton	259
• Probleme propuse	264
• Proprietăți ale integralei definite. Integrabilitatea funcțiilor continue	266
• Probleme propuse	278
• Metode de calcul ale integralelor definite	280
• Metoda integrării directe	280
• Probleme propuse	281
• Metoda integrării prin părți	282
• Probleme propuse	287
• Metoda substituției	288
• Probleme propuse	294
• Aplicații ale integralei definite	296
• Teste de evaluare	313
3. TESTE DE RECAPITULARE FINALĂ	318
• Teste pentru pregătirea examenului de bacalaureat	318
• Teste pentru pregătirea examenului de admitere în facultăți	341
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	362

Acest capitol conține informații despre noțiunea de lege de compoziție (notată generic „ $*$ ”) pe o mulțime nevidă (M) și principalele proprietăți ale acesteia. Acest concept este ilustrat prin exemple întâlnite în anii precedenți. Cuplul $(M, *)$ este o structură algebrică: monoid, grup.

Noțiunea de grup este una fundamentală în matematică, având aplicații în diverse domenii: teoria ecuațiilor algebrice și a ecuațiilor diferențiale, teoria relativității, cristalografiei, teoria informației, etc.

Ca grupuri remarcabile figurează: grupurile de matrice, grupurile de transformări (care sunt grupuri infinite), grupuri de permutări, grupul claselor de resturi, grupul rădăcinilor de ordin n ale unității (care sunt grupuri finite) etc.

Se definește conceptul de izomorfism de grupuri. Două astfel de grupuri se bucură de aceleași proprietăți algebrice. Pentru grupurile finite izomorfe tablele lor sunt la fel organizate.

Fiecare concept introdus beneficiază de probleme rezolvate diverse precum și de un set consistent de probleme propuse (cele mai multe fiind date la bacalaureat sau admitere în facultăți în ultimii ani).

Istoric. Noțiunea de grup a fost utilizată pentru prima dată de matematicianul francez Evariste Galois (1811-1832) (mort în duel la vârsta de 21 ani), care este adevăratul creator al teoriei grupurilor. Ideile teoriei grupurilor „erau în aer” (cum se întâmplă adesea cu ideile matematice fundamentale) înainte de Galois, și anumite teoreme ale teoriei grupurilor au fost demonstrate sub o formă naivă de Lagrange (1736-1813). Contemporanii lui Galois n-au înțeles și deci nici apreciat lucrările sale geniale. Ei nu s-au interesat decât după apariția în 1870 a cărții lui Jordan „*Traité des substitutions et des équations algébriques*”. De abia la sfârșitul secolului al XIX-lea în teoria grupurilor, „fantezia a fost definitiv abandonată pentru a face loc unei pregătiri atente a scheletului logic” (F. Klein „*Conferințe asupra dezvoltării matematicilor secolului al XIX-lea*”).

Matematicianul englez Arthur Cayley (1821-1895), unul dintre cei mai prolifici matematicieni (cu studii la celebrul Trinity College of Cambridge University, a scris peste 200 de articole) a fost printre primii care a descris grupurile abstracte.

PIONIER AL MATEMATICII

Evariste GALOIS (1811 – 1832)
Matematician francez



- | | |
|---|-----------------------------|
| • Lege de compoziție internă.....5 | • Grupuri finite.....45 |
| • Parte stabilă.....8 | • Morfisme și izomorfisme |
| • Proprietăți generale ale legilor de compoziție.....11 | de grupuri.....54 |
| • Structuri algebrice24 | • Teste de evaluare68 |
| • Monoizi25 | |
| • Grupuri.....27 | |

1.1. LEGE DE COMPOZIȚIE INTERNĂ

Conceptul care urmează a fi prezentat l-am întâlnit încă din gimnaziu, fără a-l defini în termenii folosiți în acest paragraf, iar mai târziu, în anii de liceu precedenți, l-am

extins pentru alte categorii de mulțimi. Acum vom interpreta lucrurile învățate în ceilalți ani dintr-un punct de vedere mai abstract.

Reamintim că dată fiind o mulțime nevidă M prin produsul cartezian $M \times M$ înțelegem mulțimea tuturor perechilor de elemente (x, y) (prima componentă este x , iar cea de-a doua este y) când $x, y \in M$, adică $M \times M = \{(x, y) | x, y \in M\}$.

Definiție. Fie M o mulțime nevidă. Se numește **operație algebrică binară** (sau **lege de compoziție internă** sau simplu **lege de compoziție**) definită pe M o aplicație $f: M \times M \rightarrow M$, care asociază fiecărei perechi $(x, y) \in M \times M$ un unic element $f(x, y) \in M$.

Elementul $f(x, y)$ se numește **compusul lui x cu y** .

Așadar, la orice pereche (cuplu) $(x, y) \in M \times M = M^2$, această operație face să corespundă în mod unic elementul $f(x, y)$ **din aceeași mulțime M** . Uneori în loc de $f(x, y)$ se scrie xy , dar cel mai des se desemnează operația binară pe M printr-un simbol special:

$$*, \circ, \perp, \top, \cup, \cap, \oplus, \bullet, \dots$$

Urmând această cale vom numi $x \cdot y$ (sau simplu xy , fără nici un semn între x și y) **produsul și $x + y$ suma** elementelor $x, y \in M$.

În primul caz vom spune că legea este dată **multiplativ**, iar în al doilea **aditiv**.

Se înțelege că, în majoritatea cazurilor, aceste denumiri sunt convenționale.

În general, pe o mulțime M se pot defini mai multe operații diferite. Când dorim să punem în evidență una dintre ele vom utiliza parantezele $(M, *)$ și vom spune că operația $*$ conferă mulțimii M o **structură algebrică** sau că $(M, *)$ este un **sistem algebric**.

De exemplu, pe mulțimea $\mathbb{Z}$ pe lângă operațiile $+, \cdot$ (adunarea și înmulțirea numerelor întregi) putem defini și alte operații „derivate”:

$x \circ y = x + y - 2xy$, $x * y = -x + y$, $x \perp y = -x - y + xy$ etc. care se obțin cu ajutorul operațiilor $+$ (sau $-$) și $\cdot$. Rezultă astfel structuri algebrice diferite: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \circ)$, $(\mathbb{Z}, *)$, $(\mathbb{Z}, \perp)$.

Așa cum vom vedea în capitolele care urmează, vom clasifica structurile algebrice după:

- **numărul de legi de compoziție;**
- **proprietățile acestor operații.**

Exemple cunoscute de legi de compoziție

1. Adunarea pe $\mathbb{N}$ (mulțimea numerelor naturale) este aplicația $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ care asociază cuplului (x, y) elementul $x + y$ (suma dintre x și y). Vom marca această corespondență prin $(x, y) \rightarrow x + y$.

2. **Înmulțirea pe $\mathbb{N}$** este aplicația $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dată de corespondența $(x, y) \rightarrow x \cdot y$.
3. **Adunarea pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$** (mulțimea matricelor pătrățice de ordin n cu elemente numere complexe) este definită prin $+: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), (A, B) \rightarrow A + B$.
4. **Înmulțirea pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$** este aplicația definită prin $\cdot : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), (A, B) \rightarrow AB$.
5. **Reuniunea pe $\mathcal{P}(M)$** (mulțimea părților lui M ; reprezintă toate submulțimile lui M) este definită prin: $\cup : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M), (A, B) \rightarrow A \cup B$.
6. **Intersecția pe $\mathcal{P}(M)$** este definită prin $\cap : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M), (A, B) \rightarrow A \cap B$.
7. **Compunerea pe $\mathcal{F}(M)$** (mulțimea funcțiilor definite pe M cu valori în M) este aplicația $\circ : \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M), (f, g) \rightarrow f \circ g$.

Desigur că exemplele pot continua cu alte legi de compoziție întâlnite în anii precedenți.

Tabla operației (legii)

Dacă mulțimea M este **finită**, atunci operația algebrică $*$ pe M poate fi dată prin așa numita **tablă a operației** (sau **tabla lui Cayley**). Într-adevăr, dacă $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, atunci tabla operației arată astfel:

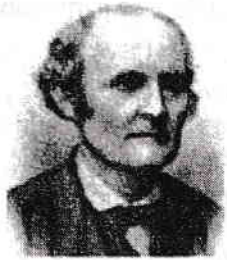
$*$	a_1	a_2	$\dots$	a_j	$\dots$	a_n
a_1	$a_1 * a_1$	$a_1 * a_2$	$\dots$	$a_1 * a_j$	$\dots$	$a_1 * a_n$
a_2	$a_2 * a_1$	$a_2 * a_2$	$\dots$	$a_2 * a_j$	$\dots$	$a_2 * a_n$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_i	$a_i * a_1$	$a_i * a_2$	$\dots$	$a_i * a_j$	$\dots$	$a_i * a_n$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_n	$a_n * a_1$	$a_n * a_2$	$\dots$	$a_n * a_j$	$\dots$	$a_n * a_n$

În acest tabel elementul $a_i * a_j$ este situat pe linia i și coloana j . Dacă notăm $a_{ij} = a_i * a_j$, atunci putem gândi tabla operației ca o matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$.

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

Dacă luăm $M = \{1, -1, i, -i\}$ cu operația de înmulțire, atunci avem tabla legii prezentată alăturat. Alcătuiți tabla legii pe mulțimea M în cazurile:

- 1) $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $x * y = \min\{x, y\}$;
- 2) $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $x \circ y = \text{c.m.m.d.c.}\{x, y\}$.

UN PIONIER AL MATEMATICII	
Arthur CAYLEY (1821 – 1895) Matematician englez	
	
CONTRIBUȚII	
• teoria matricelor • teoria grupurilor	

1.2. PARTE STABILĂ

Dacă $(M, *)$ este o structură algebrică, iar H este o submulțime nevidă a lui M , atunci pentru $x, y \in H$ elementul $x * y$ poate să fie în mulțimea H sau să fie în afara ei, adică în $M - H$.

Definiție. Dacă pentru orice $x, y \in H$, compusul $x * y$ aparține tot lui H , atunci spunem că H este **parte stabilă** a lui M în raport cu operația $*$.

Deci, H este parte stabilă a lui M în raport cu $*$ $\Leftrightarrow [\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H]$ (fig. 1)

În raport cu adunarea, $\mathbb{N}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Q}$ etc.

Analog, în raport cu adunarea matricelor $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$,

$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ etc.

Dacă $\mathcal{I}(M), \mathcal{S}(M)$ sunt mulțimea funcțiilor injective definite pe M cu valori în M și respectiv mulțimea funcțiilor surjective de la M la M , atunci acestea sunt părți stabile ale lui $\mathcal{F}(M)$ în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

Observații. 1) Adjectivul „stabilă” din noțiunea de „parte stabilă” pentru o submulțime H a lui M în raport cu $*$ vine să precizeze că dacă $x, y \in H$ (sunt două elemente arbitrare din H), atunci și compusul lor $x * y$ rămâne în H .

2) Dacă $H \subset M$ și se consideră o aplicație $*$ pentru H , atunci aceasta nu este neapărat o lege de compoziție. Acest lucru trebuie dovedit. Deci enunțul nu poate fi de forma:

„Fie H o mulțime și legea de compoziție pe H , $x * y = \dots$ ”.

Exemplificăm acest lucru prin următoarea problemă:

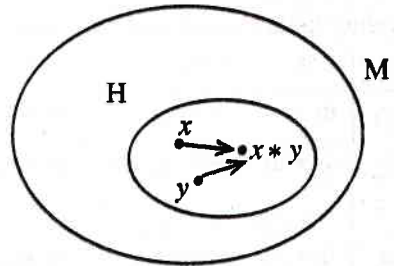
Fie $H = [0, 2]$ și aplicația $x * y = xy - x - y + 2$, $(\forall) x, y \in H$.

Arătați că $*$ este o lege de compoziție pe H .

Deci trebuie să arătăm că $(\forall) x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$. Ori avem $x * y = (x-1)(y-1) + 1$.

Cum $x, y \in H \Rightarrow |x-1| \leq 1, |y-1| \leq 1$.

Prin urmare faptul că $x \in H \Leftrightarrow |x-1| \leq 1$. Deci $x * y \in H \Leftrightarrow |x * y - 1| \leq 1 \Leftrightarrow |(x-1)(y-1)| \leq 1 \Leftrightarrow |x-1||y-1| \leq 1$, ceea ce este adevărat pentru că $|x-1| \leq 1, |y-1| \leq 1$.



$$x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$$

Fig. 1

3) Dacă H este parte stabilă a lui M în raport cu $*$, atunci $H \times H \subset M \times M$ și deci putem vorbi de restricția legii $*$ la $H \times H$, care este tot o lege de compoziție. Pentru comoditate vom nota și restricția tot cu $*$.

Deci, dacă H este parte stabilă a lui M în raport cu $*$, atunci legea de compoziție $*: H \times H \rightarrow H$ se spune că este **indusă** de legea de compoziție de pe M . Se mai spune că legea de pe M **induce** pe H o lege de compoziție.

Probleme rezolvate

1) Fie $M = \mathbb{Z}$, iar $H = 2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (mulțimea numerelor întregi pare) și $H' = 2\mathbb{Z} + 1 = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (mulțimea numerelor întregi impare) avem $H, H' \subset \mathbb{Z}$.

Pe $\mathbb{Z}$ considerăm legea de compoziție adunarea numerelor întregi. Se constată ușor că H este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu adunarea deoarece din $x, y \in H$, $x = 2k, y = 2l, k, l \in \mathbb{Z}$ avem $x + y = 2(k + l) \in 2\mathbb{Z}$ în timp ce H' nu este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu adunarea pentru că dacă $x, y \in 2\mathbb{Z} + 1$, $x = 2k + 1, y = 2l + 1, k, l \in \mathbb{Z}$, atunci $x + y = 2(k + l + 1) \notin 2\mathbb{Z} + 1$.

2) Pentru $M = \mathbb{Z}$ considerăm legea de compoziție $x * y = \max(x, y)$. Fie $H = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Atunci H este o parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu $*$.

Într-adevăr, acest lucru va reieși din tabla legii pentru H .

Observăm că toate elementele (rezultate din compunere) ce figurează în tablă aparțin lui H . Prin urmare H este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea $*$.

3) Fie $M = \mathbb{R}$ și legea de compoziție $x * y = xy - x - y + 2$. Considerăm intervalele $H = (1, 2)$, $H' = (2, 3)$ submulțimi ale lui $\mathbb{R}$. Să probăm că H este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu $*$, în timp ce H' nu are această proprietate.

Într-adevăr, fie $x, y \in H$. Atunci trebuie probat că $x * y \in H \Leftrightarrow 1 < xy - x - y + 2 < 2 \Leftrightarrow 1 < (x-1)(y-1) + 1 < 2 \Leftrightarrow 0 < (x-1)(y-1) < 1$ ceea ce este evident, deoarece $x, y \in H \Leftrightarrow 1 < x, y < 2 \Leftrightarrow 0 < x-1, y-1 < 1$, iar de aici $0 < (x-1)(y-1) < 1$.

Pentru afirmația relativă la H' este de observat că luând $x = \frac{5}{2}, y = \frac{5}{2}$ din H' , rezultă

$$x * y = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} - \frac{5}{2} - \frac{5}{2} + 2 = \frac{13}{4} \notin H'. \text{ Deci nu pentru orice } x, y \in H' \Rightarrow x * y \in H'.$$

Probleme propuse

1) Pe $\mathbb{N}^*$ se consideră legea de compoziție $x * y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y)$. Fie $H = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \text{ divide } 10\}$.

Arătați că H este parte stabilă a lui $\mathbb{N}^*$ în raport cu $*$, construind tabla legii.

2) Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim legile de compoziție:

$$x \oplus y = \text{restul împărțirii lui } x + y \text{ prin } 5,$$

$$x \otimes y = \text{restul împărțirii lui } x \cdot y \text{ prin } 5.$$

Arătați că $H = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu fiecare din cele două legi, alcătuind tablele legilor.

3) Fie $H = \{-3, -1, 0, 1\} \subset \mathbb{Z}$ și $x * y = \min(x, y)$ o lege de compoziție pe $\mathbb{Z}$. Probați că H este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu $*$, alcătuind tabla legii.

4) Arătați că $\mathbb{Z}[\sqrt{p}] = \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}^* \text{ prim}\}$,

$$\mathbb{Q}[\sqrt{p}] = \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{N}^* \text{ prim}\}$$

sunt părți stabile ale lui $\mathbb{R}$ în raport cu adunarea și înmulțirea.

5. Să se arate că $H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu operația de înmulțire. Este finită mulțimea H ?

6. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x * y = xy - 2(x + y) + 6$. Să se arate că $H = (1, 3)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $*$.

7. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea $x \perp y = 5xy - 20(x + y) + 84$. Să se arate că $H = [4, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $*$.

8. Pe $\mathbb{R}$ considerăm legea de compoziție $x * y = \sqrt{x^2 + y^2} - 9$. Arătați că $H = [3, \infty)$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu $*$.

9. Arătați că următoarele submulțimi ale lui $\mathbb{C}$ sunt părți stabile în raport cu înmulțirea numerelor complexe:

- a) $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$; b) $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 \neq 0\}$; c) $\{z \mid |z| \leq 1\}$;
d) $\{z \mid |z| > 1\}$; e) $\{z \mid |z| \geq 2\}$; f) $\{z \mid |z| < \frac{1}{2}\}$.

10. Pe $\mathcal{F}(\mathbb{R} - \{0, 1\})$ considerăm operația de compunere a funcțiilor. Fie $H = \{f_1, f_2, f_3\}$, $f_i : \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0, 1\}$, $i = 1, 2, 3$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{x-1}{x}$, $f_3(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Probați că H este parte stabilă a lui $\mathcal{F}(\mathbb{R} - \{0, 1\})$ în raport cu operația de compunere, alcătuind tabla legii.

11. Pe $\mathcal{F}(\mathbb{R} - \{0\})$ se consideră operația de compunere a funcțiilor.

Fie $H = \{f_1, f_2, f_3, f_4\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R} - \{0\})$, unde $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$, $f_4(x) = -\frac{1}{x}$.

Arătați că H este parte stabilă a lui $\mathcal{F}(\mathbb{R} - \{0\})$ în raport cu $\circ$, alcătuind tabla legii.

12. Determinați părțile finite ale lui $\mathbb{R}$ stabile în raport cu adunarea din $\mathbb{R}$ și părțile finite ale lui $\mathbb{R}$ stabile în raport cu înmulțirea din $\mathbb{R}$.

13. Fie $H = \left\{ A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Să se arate că H este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire.

14. Fie $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a + b = c + d \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Arătați că H este parte stabilă a lui

$\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

15. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $*$ prin $x * y = x + y + xy$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât mulțimea $H = [a, \infty)$ să fie parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $*$.

16. Pentru ce valori ale parametrului real a , intervalul I este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu „ $*$ ” în cazurile:

- 1) $x * y = xy - 2x - 2y + a$, $I = (2, \infty)$; 2) $x * y = x + y + axy$, $I = [-1, \infty)$.